Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

8 класс

> ***Задача 1**. Красная Шапочка решила сходить к бабушке, домик которой находился в 1 км ходьбы от ее дома. Волк ей в тот день не попался, поэтому туда и обратно она шла по одному и тому же маршруту. На горизонтальных участках ее скорость была 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, а с горы – 6 км/ч. Сколько времени она была в пути?*

Ответ. Полчаса.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь наклонный участок пути длиной s. Проходя его в гору, Красная Шапочка потратит время $s/3$, под гору – $s/6$, всего -- $s\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{s}{2}$. Значит, ее средняя скорость на этом участке составляет $2s:\frac{s}{2}=4$. Итак, средняя скорость на всех участках одинакова и равна 4 км/ч. Весь путь девочки составляет 2 км, так что она потратит на дорогу полчаса.

Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 1 балл. За полное обоснование 7 баллов.

> ***Задача 2**. Петя утверждает, что два спинера дороже пяти мороженых, Вася -- что три спинера дороже восьми мороженых. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спинеров дороже 19 мороженых?*

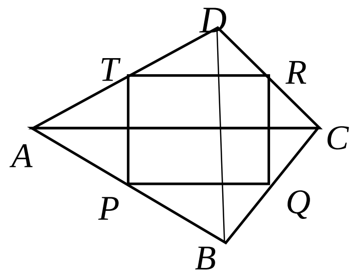
Ответ. Неверно.

Решение. Обозначим цену спинера через s, а мороженого – через m. Первое утверждение означает, что $s > \frac{5m}{2}=\frac{15m}{6}$, второе – что $s > \frac{8m}{3}=\frac{16m}{6}$. Если бы выполнялось второе условие, то выполнялось бы и первое, что противоречит условию. Значит, $s\le\frac{8m}{3}$. Но тогда $7s\le\frac{56m}{3}<19m$.

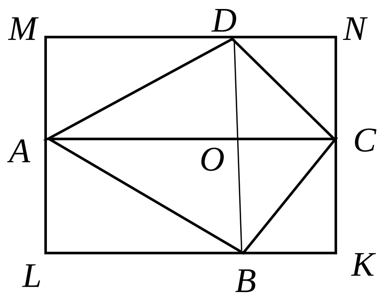
Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 0 баллов. За полное обоснование 7 баллов.

> ***Задача 3**. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей 2 и 4 см. Найти площадь четырёхугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.*

Ответ. 4 см^2.



Решение. Отрезок, соединяющий середины смежных сторон четырехугольника параллелен его диагонали (как средняя линия соответствующего треугольника). Поэтому четырехугольник $PQRT$ – параллелограмм. По условию диагонали этого параллелограмма равны, так что он является прямоугольником. Но тогда и диагонали AC и BD, параллельные его сторонам, перпендикулярны между собой.



Проведем через вершины прямоугольника прямые, параллельные диагоналям. Получим описанный прямоугольник $KLMN$. Заметим, что треугольник AMD равен ADO, CDN – треугольнику CDO и т.д. Поэтому площадь $KLMN$ вдвое больше, чем площадь $ABCD$. Итак, искомая площадь составляет $S = ½ \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления S, например, как удвоенной площади $PQRT$. Также можно использовать формулу S = ½ $AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, где α – угол между диагоналями.

Критерии. За разбор частного случая – 0 баллов. Доказательство того, что $SPQR$ – прямоугольник – 3 балла.

> ***Задача 4****. Три прямые, пересекаясь, образуют 12 углов, причем n из них оказались равными. Каково может быть максимальное значение n?*

Ответ. 6.

Решение. Три прямые ограничивают некий треугольник. Если этот треугольник равносторонний, то из двенадцати углов шесть составляют 60°, а остальные шесть -- 120°.

Может ли какой-нибудь внешний угол треугольника быть равным его внутреннему углу? Он равен сумме несмежных с ним внутренних, так что он больше каждого из несмежных. Значит, равным он может быть только смежному с ним. Тогда каждый из них составляет 90°, таких углов 4 (у них общая вершина). Других прямых углов в этой конструкции нет. Но тогда другие внешние углы не равны внутренним. Равными могут быть только внутренние (и вертикальные к ним) или только внешние (и вертикальные к ним). Тогда равных углов каждого типа будет не более 4.

Критерии. За пример с шестью равными углами – 3 балла, за сравнение внешних и внутренних углов – 3 балла. За ответ без обоснования – 1 балл.

> ***Задача 5****. Рассмотрим четыре последовательных числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Для каких n НОК первых трех чисел больше, чем НОК последних трех?*

Ответ. Любое нечетное число не меньшее 5.

Решение. Рассмотрим тройку чисел n, $n + 1$, $n + 2$. Каждые два соседних числа взаимно просты. Если числа n и $n + 2$ имеют общий делитель, то он является делителем их разности, 2. Итак, если число n нечетное, то все три числа n, $n + 1$, $n + 2$ попарно взаимно просты, так что НОК(n, $n + 1$, $n + 2$) = $n(n + 1)(n + 2)$. Если n четное, то НОК(n, $n + 1$, $n + 2$) = $n(n + 1)(n + 2)/2$. Ясно, НОК($n + 1$, $n + 2$, $n + 3$) может быть меньше НОК(n, $n + 1$, $n + 2$), только если n – нечетное. Неравенство принимает вид

$$n(n+1)(n+2) > \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$$

или после сокращения $2n > n + 3$. Окончательно $n > 3$, откуда в силу нечетности $n \geq 5$.

Критерии. За вычисление НОК для случая нечетных n – 2 балла, для случая четных -- 3 балла. За полное решение – 7 баллов. За отдельные примеры – 0 баллов.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

9 класс

> ***Задача 1****. При каких p один из корней уравнения $x^2 + px + 18 = 0$ вдвое больше другого?*

Ответ. 9 или –9.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и $2a$. По теореме Виета $a + 2a = –p$, $a\cdot 2a = 18$. Значит, $a = \pm 3$, $p = –3a$.

Критерии. За потерю второго решения – вычитаются 2 балла. За ответ без обоснования – 0 баллов. Допускается решение без использования теоремы Виета. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *2. Известно, что число $a = \frac{x}{x^2-x+1}$ рационально. Доказать, что число $b = \frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ также рационально.*

Решение. При $x = 0$ число $b = 0$ – рационально. Если $x \neq 0$, то и $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда можно записать $\frac{1}{a} = x - 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{b} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$. Значит, $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + 1$. Возведем это равенство в квадрат, получим $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1$, откуда $\frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 2$, то есть $b = \frac{a^2}{1+2a-2a^2}$. В силу рациональности a эта дробь также рациональна. Осталось только проверить, что b всегда существует. Знаменатель мог бы обратиться в ноль при $a = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, что невозможно в силу рациональности a.

Критерии. Если не исследован случай $x = 0$, снимается 1 балл. Если не проверено, что b существует – снимается 3 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. Натуральное число n таково, что числа 2n + 1 и 3n + 1 являются квадратами. Может ли при этом число n быть простым?*

Ответ. Нет, не может.

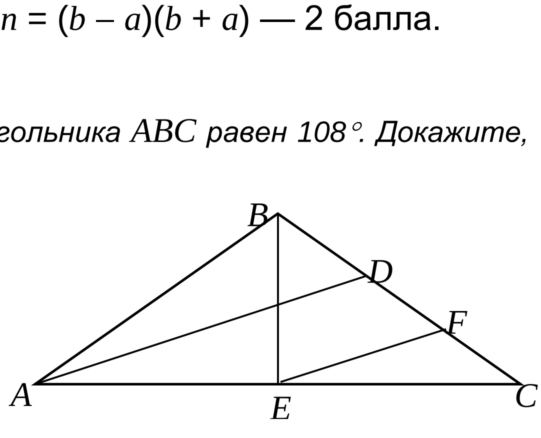
Решение. Пусть $2n + 1 = a^2$ и $3n + 1 = b^2$, тогда

$$n = (3n + 1) – (2n + 1) = b^2 – a^2 = (b – a)(b + a).$$

Если число n — простое, то $b – a = 1$ и $b + a = n$. Из этих равенств легко выразить числа a и b через n: $a = \frac{n-1}{2}$ и $b = \frac{n+1}{2}$. Подставив выражение для a в исходное равенство $2n + 1 = a^2$, получим квадратное уравнение $n^2 – 10n – 3 = 0$, которое не имеет целых корней. Значит, такого простого числа n нет.

Критерии. Доказано только равенство $n = (b – a)(b + a)$ — 2 балла.

> *4. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Докажите, что биссектриса угла A вдвое больше биссектрисы угла B.*



Решение. Пусть AD и BE — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC. Через точку E проведём отрезок EF параллельно AD, тогда EF – средняя линия треугольника ACD, и $EF = \frac{1}{2}AD$. Несложным подсчётом углов получаем $\angle FBE = \angle BFE = 54^\circ$, и значит, треугольник BEF — равнобедренный. Отсюда $BE = EF = \frac{1}{2}AD$, и поэтому $AD = 2 \cdot BE$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1 × 3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1 × 3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?

Ответ.

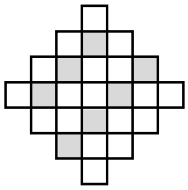


Рис. 1, а

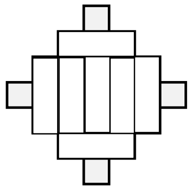


Рис. 1, б

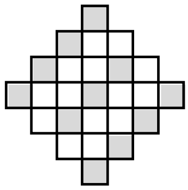


Рис. 2, а

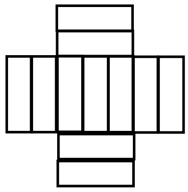


Рис. 2, б

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» рас-краска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных кле-ток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может со-держать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки по-надобится не менее 11 полосок (оценка). На рисун-ке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования – по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее – по 3 балла за каждый пункт. Полное решение – 7 баллов.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

10 класс

> *1. Известно, что* $\sin(\alpha + \beta) = 0{,}2$ *и* $\cos(\alpha - \beta) = 0{,}3$*. Вычислите* $\sin(\alpha + 45°)\cdot\sin(\beta + 45°)$.

Ответ. 0,25.

Решение. По формуле для синуса суммы углов имеем

$$\sin(\varphi + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

и значит, $P = \sin(\alpha + 45°)\cdot\sin(\beta + 45°) = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta)$. Раскрывая скобки и вновь используя формулу для синуса и косинуса суммы углов, получим

$$P = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0{,}25.$$

Критерии. Доказано равенство $P = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta)$ — 1 балл.

> *2. При каких q один из корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ является квадратом другого?*

Ответ. –64 или 27.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и a^2. По теореме Виета $a + a^2 = 12$, $a\cdot a^2 = q$. Значит, $a = -4$ или $a = 3$, $q = a^3$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что $|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_{100}| = 50$?*

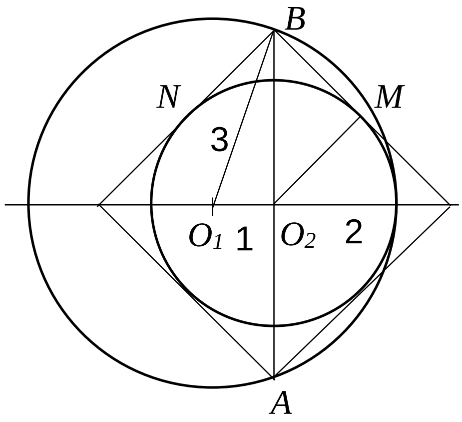
Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_{100}| - 50$, непрерывную на отрезке [0;1]. Имеем $f(0) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} - 50$, $f(1) = (1 - x_1) + (1 - x_2) + \ldots + (1 - x_{100}) - 50$. Значит, $f(0) + f(1) = \Sigma x_i + \Sigma(1 - x_i) - 100 = 0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x \in [0;1]$, при котором $f(x) = 0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

4. Две окружности, радиусы которых относятся как 2 : 3, касаются внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.



Ответ. Все углы прямые.

Решение. По теореме Пифагора O_2B = $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника O_2BM находим BM = 2. Значит, треугольник O_2BM равнобедренный, с углом 45°. Аналогично и угол O_2BN составляет 45°.

Итак, касательные, проведенные из одной точки к меньшей окружности перпендикулярны между собой.

Можно проводить расчет и другими способами.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1 × 3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1 × 3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?

Ответ.

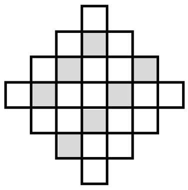


Рис. 1, а

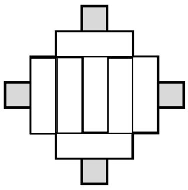


Рис. 1, б

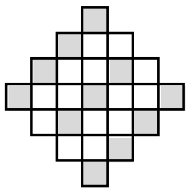


Рис. 2, а

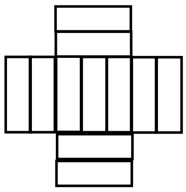


Рис. 2, б

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» рас-краска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных кле-ток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может со-держать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки по-надобится не менее 11 полосок (оценка). На рисун-ке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования – по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее – по 3 балла за каждый пункт. Полное решение – 7 баллов.

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

11 класс

> *1. При каких p один из корней уравнения $x^2 - px + p = 0$ является квадратом другого? (считаем, что корни уравнения различны)*

Ответ. $2 \pm \sqrt{5}$.

Решение. Обозначим корни a и a^2. По теореме Виета $a + a^2 = p$, $a \cdot a^2 = p$. Значит, $a + a^2 = a^3$. Корень $a = 0$ не подходит, так как у уравнения $x^2 = 0$ корни совпадают. С учетом $a \neq 0$ получаем, что $a^2 - a - 1 = 0$, корнями этого уравнения являются $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. При этом $p = a^2 + a = (a + 1) + a = 2a + 1$.

Критерии. Если не отброшен лишний корень, снимается 2 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *2. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного натурального числа n, а Вася – сумму всех его чётных делителей. Может ли произведение их результатов оказаться равным 2016? Если может, найдите все такие числа n.*

Ответ. 88 и 192.

Решение. Пусть $n = m \cdot 2^k$ – исходное чётное число, и m – его нечётный множитель. Сумма нечётных делителей числа n совпадает с суммой s всех делителей числа m, и значит, Петя получит число s. Сумма всех чётных делителей n состоит из суммы делителей, которые делятся только на 2, из суммы делителей, кратных только 4, и так далее, и наконец, из суммы делителей, кратных 2^k. Каждый нечётный делитель при умножении на 2 – это делитель, кратный только 2, поэтому первая сумма равна $2s$, вторая сумма – $4s$ и так далее. Следовательно, сумма всех чётных делителей будет $2s + 4s + ... + 2^k s = 2(2^k - 1)s$. Произведение результатов Пети и Васи равно $2s^2(2^k - 1) = 2016$, и, значит, $s^2(2^k - 1) = 1008$.

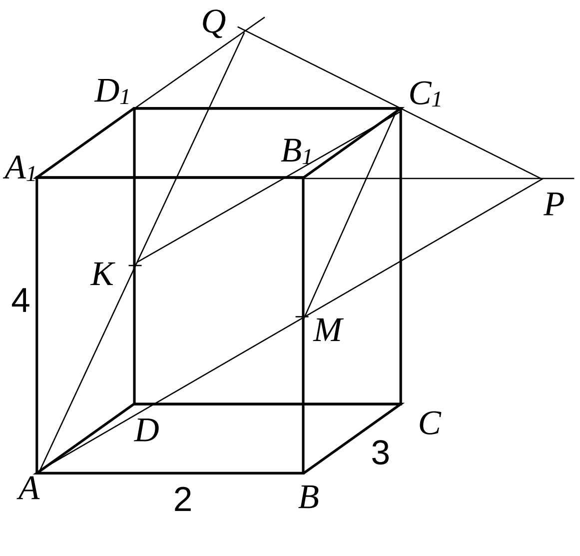
Полученное равенство означает, что число 1008 = 24·32·7 делится на квадрат натурального числа $s > 1$ и число вида $2^k - 1$. Среди разложений числа $1008 = 2^2 \cdot 252 = 3^2 \cdot 112 = 4^2 \cdot 63 = 6^2 \cdot 28 = 12^2 \cdot 7$, содержащих квадрат натурального числа, сомножитель вида $2^k - 1$ содержат только разложения $4^2 \cdot 63$ и $12^2 \cdot 7$. Значит, $s = 4$, $k = 6$, или $s = 12$, $k = 3$. В первом случае, $m = 3$, и значит, $n = 3 \cdot 2^6 = 192$; во втором – $m = 11$, и значит, $n = 11 \cdot 2^3 = 88$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны $AB = 2$, $AC = 3$, $AA_1 = 4$. Найти площадь сечения AMK, где M – середина BB_1 и K – середина DD_1.*

Ответ. $2\sqrt{22}$

Решение. Построим искомое сечение (см. рисунок). Точка P есть пересечение AM и A_1B_1, В силу по-



ложения точки M A_1P вдвое больше, чем A_1B_1. Аналогично строим точку Q, A_1Q = 2A_1D_1. Значит, PQ параллельно B_1D_1 и проходит через точку C_1. Итак, сечение является параллелограммом AKC_1M.

Площадь можно вычислить разными способами.

1 способ. Заметим, что $KM = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $AM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $AK = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Итак, треугольник AKM равнобедренный, его высота равна $\sqrt{13-2} = \sqrt{11}$. Тогда площадь сечения составляет $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}$ = $2\sqrt{22}$.

2 способ. Используем векторы. Известно, что $S = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \sin\varphi$, в то время как $(\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}) = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi$ значит, $S^2 = \overrightarrow{AK}^2 \cdot \overrightarrow{AM}^2 - (\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM})^2$. Заметим, что с параллелепипедом можно связать систему координат с началом с точке A. Имеем $\overrightarrow{AK} = (0,3,2)$ и $\overrightarrow{AM} = (2,0,2)$. Тогда $\overrightarrow{AK}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, $\overrightarrow{AM}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $(\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM})$ = 0 + 0 + 4 = 4 откуда и следует ответ.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления площади. Например, через векторное произведение векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

4. Пусть x_1, x_2, … , x_{100} — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что $|x - x_1| + |x - x_2| + . . . + |x - x_{100}| = 50$?

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_{100}| - 50$, непрерывную на отрезке [0;1]. Имеем $f(0) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} - 50$, $f(1) = (1 - x_1) + (1 - x_2) + \ldots + (1 - x_{100}) - 50$. Значит, $f(0) + f(1) = \Sigma x_i + \Sigma(1 - x_i) - 100 = 0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x \in [0;1]$, при котором $f(x) = 0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. На доске размером 10×10 стоят 10 небьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки доски замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1.

Ответ. Нельзя.

Решение. Для каждой ладьи с номером i обозначим через s_i сумму номеров строки и столбца, в которых она стоит. Поскольку ладьи не бьют друг друга, то номера всех строк и столбцов встречаются ровно по одному разу. Сумма всех чисел s_i независимо от расстановки будет чётной и равна

$$\sum_{i=1}^{10} s_i = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 110$$

Из этого равенства, в частности, следует, что количество нечётных чисел s_i будет чётным. Таким образом, из 10 чисел s_i количества нечётных и чётных значений не совпадают. Предположим, левый нижний угол доски покрашен в чёрный цвет, тогда у всех чёрных клеток доски числа s_i чётные, а у белых клеток – нечётные. Поскольку количества нечётных и чётных значений s_i не совпадают, ладей на чёрных и белых клетках – разное количество. Значит, разными будут и количества белых и чёрных свободных от ладей клеток. Так как каждая доминошка закрывает по одной чёрной и белой клетке доски, то оставшиеся свободные клетки выложить доминошками не удастся.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.